Predavanja iz predmeta Matematika za ekonomiste: I dio

U okviru prvog dijela predavanja predviđeno je da studenti savladaju slijedeće programske sadržaje:

1. Pojam matrice i operacije s matricama. Jedinična matrica. Transponovana matrica.
2. Pojam determinante materice. Način izračunavanja determinante reda 2 i 3. Osobine determinanti.
3. Pojam minora i kofaktora i način njihovog izračunavanja. Laplaceovo pravilo o razvoju determinante.
4. Pojam inverzne matrice i način njenog izračunavanja.

Prije nego što počnemo sa prvim dijelom predavanja iz Matematike za ekonomiste, u kome ćemo izložiti osnovne pojmove iz linearne algebre, reći ćemo nekoliko riječi o primjeni linearne algebre u ekonomiji.
Pri izučavanju ponašanja nekog ekonomskog modela u određenom vremenskom trenutku posmatraju se varijable koje nam karakterišu model i uočava se njihova međuzavisnost. Na primjer, ukoliko posmatramo neki od modela nacionalnog dohotka, varijable koje posmatramo mogu biti nacionalni dohodak, investicije, vladina potrošnja, potrošnja, ukupni porezi, stopa poreza na dohodak i dr. Na osnovu empirijskih proučavanja i ekonomskih pretpostavki modela veza između varijabli iskazuje se jednačinama veze. Za te jednačine veze možemo pretpostaviti da su linearne, jer se mogu određenim matematskim metodama (za date okvirne vrijednosti varijabli) linearizirati. Na taj način model je okarakterisan sistemom linearnih jednadžbi. Rješenje tog sistema linearnih jednadžbi je tzv. ekvilibrijum ili ravnotežni položaj modela. On je predstavljen onim vrijednostima varijabli u kojima model ne teži ka promjeni. Odrediti ekvilibrium modela znači riješiti sistem linearnih jednadžbi, a to se čini upravo metodama linearne algebre koje ćemo u daljem upoznati.
Napomenimo da se linearna algebra koristi za ispitivanje tzv. stacionarnog ponašanja ekonomskog modela, tj. ponašanja u fiksiranom trenutku vremena, dok se za ispitivanje dinamike modela (tj. promjene modela u toku vremena) koristi diferencijalni i integralni račun, o kome ćemo govoriti nešto kasnije.

I.1. Pojam matrice i operacije s matricama. Jedinična matrica. Transponovana matrica

Matricom formata mxn smatrat ćemo shemu od mn realnih brojeva. Ako je A matrica formata mxn, tada njene elemente označavamo sa a_{ij}, gdje nam i označava redni broj vrste, a j redni broj kolone matrice A, i pišemo $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$. Na primjer, element a_{35} se nalazi u trećoj vrsti i petoj koloni matrice.
Matricu formata mxn možemo zapisati i kao

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricu formata $mx1$ (koja ima samo jednu kolonu) zovemo vektor-kolonom, a matricu formata $1xn$ (koja ima samo jednu vrstu) zovemo vektor-vrstom.

Na primjer, matrica $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\4\end{pmatrix}$ je vektor-kolona, jer je formata 4x1.

Matrica $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\end{pmatrix}$ je vektor-vrsta, jer je formata 3x1.

Skup svih matrica formata mxn čiji elementi su realni brojevi označavamo sa $\mathbb{R}^{mxn}$ (pri čemu je $\mathbb{R}$ oznaka za skup realnih brojeva).

I.1.1. Sabiranje matrica i množenje matrica skalarom

Dvije osnovne operacije s matricama su sabiranje matrica i množenje matrice skalarom (tj. množenje matrice realnim brojem).
Matrice A i B možemo sabrati ako i samo ako su jednakih formata. U tom slučaju matrice se sabiraju tako što se saberu oni elementi matrica koji se nalaze u istoj vrsti i istoj koloni. To zapisujemo na lijedeći način:
Ako je $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ i $B=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$, tada je $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mxn}$.

Primjer: Saberimo matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 3\\7 & -12\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 4\\7 & 11\end{pmatrix}$. Imamo:

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & 7\\14 & -1\end{pmatrix}.$$

Anaolgno sabiranju, matrice jednakih formata oduzimamo tako što oduzmemo odgovarajuće elemente jedne matrice od elemenata druge matrice. Za matrice A i B iz prethodnog primjera je

$$A-B=\begin{pmatrix}1-(-2) & 0-3\\-2-1 & 3-4\\7-7 & -12-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\-3 & -1\\0 & -23\end{pmatrix}.$$

Matrica se množi skalarom tako što se svaki element te matrice pomnoži datim skalarom (odnosno realnim brojem). To zapisujemo na slijedeći način:
Ako je data matrica $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ i realan broj λ, tada je $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)_{mxn}$.
Za matrice A i B iz prethodnog primjera je

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 0\\-4 & 6\\14 & -24\end{pmatrix},\quad \text{dok je}\quad -\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2} & -2\\-\frac{7}{2} & -\frac{11}{2}\end{pmatrix}.$$

Na kraju, izračunajmo matricu $3A-2B$. Kao prvo, pomnožićemo matrice A i B skalarima, a zatim ćemo tako dobijene matrice oduzeti. Imamo:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}3 & 0\\-6 & 9\\21 & -36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 6\\2 & 8\\14 & 22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -6\\-8 & 1\\7 & -58\end{pmatrix}.$$

Sabiranje matrica (istog formata) i množenje matrica skalarom ima slijedeće osobine.
Za $A,B,C\in\mathbb{R}^{mxn}$ i $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ vrijedi:
1. $A+B=B+A$ (sabiranje matrica je komutativno)

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (sabiranje matrica je asocijativno)

3. Postoji matrica $O\in\mathbb{R}^{mxn}$ (tzv. nula-matrica, tj. matrica čiji svi elementi su jednaki nula) takva da za sve matrice $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ vrijedi $A+O=O+A=A$.
Nula matrica zove se još i neutralni element u odnosu na sabiranje matrica.

4. Za svaku matricu $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ postoji njoj suprotna matrica $-A\in\mathbb{R}^{mxn}$ takva da je $A+(-A)=(-A)+A=O$.

5. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.

6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

7. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Primjer (za samostalan rad). Ako je $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&3&2&0\\2&4&1&2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&-2&2\\3&2&1&2\end{pmatrix}$, izračunati $2A-\frac{1}{2}B$.

I.1.2. Množenje matrica

Za dvije matrice $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ i $B\in\mathbb{R}^{sxp}$ kažemo da su **saglasne** ukoliko je $n=s$. Dakle, matrice A i B su saglasne ako i samo ako je broj vrsta matrice B jednak broju kolona matrice A.
Neka su sada $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ i $B\in\mathbb{R}^{nxp}$ dvije saglasne matrice, pri čemu je $A=(a_{ij})_{mxn}$ i $B=(b_{jk})_{nxp}$. Proizvod matrica A i B je matrica C, formata mxp, takva da je $C=(c_{ik})_{mxp}$ i vrijedi $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$. Dakle, elemenat u i-toj vrsti i k-toj koloni matrice $C=AB$ dobijemo tako što svaki od elemenata i-te vrste matrice A pomnožimo s odgovarajućim elementom k-te kolone matrice B i te proizvode saberemo.
Ilustrujmo ovu definiciju na slijedećem primjeru:

Primjer. Nađimo proizvod matrica $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&3&2&0\\2&4&1&2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\-1&0&3\\0&2&0\end{pmatrix}$.

Prije svega, matrice A i B su saglasne, jer je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B (jednak 4).
Proizvod matrica A i B biće matrica formata 3x3. Nju dobijamo na slijedeći način:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&3&2&0\\2&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\-1&0&3\\0&2&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot2 & 0\cdot(-1)+1\cdot2+(-1)\cdot3+0\cdot0\\ 1\cdot1+3\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot0 & 1\cdot0+3\cdot1+2\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot(-1)+3\cdot2+2\cdot3+0\cdot0\\ 2\cdot1+4\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0 & 2\cdot0+4\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 2\cdot(-1)+4\cdot2+1\cdot3+2\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&-1\\5&3&11\\9&8&9\end{pmatrix}.$$

Iz ovog primjera također možemo zaključiti da množenje matrica nije komutativna operacija. Naime, iako su matrice A i B saglasne, kao i matrice B i A, matrica $C = AB$ je formata 3x3, dok je matrica $D = BA$ formata 4x4.
Matricu A iz prethodnog primjera nije moguće pomnožiti samu sa sobom, tj. izračunati proizvod $A \cdot A$. Da bi neku matricu bilo moguće pomnožiti samu sa sobom, potrebno je i dovoljno na ona bude kvadratna matrica, tj. da ima jednak broj vrsta i kolona (dakle, mora biti $m = n$). Takve matrice je moguće i stepenovati prirodnim brojem, na slijedeći način.
Za $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ po definiciji stavljamo
$A^0 = E_n$ i $A^m = A \cdot A^{m-1}$, za svaki prirodan broj m.
Ovdje smo sa E_n označili jediničnu matricu reda n (tj. jediničnu matricu formata nxn). Iako je nula-matrica bila matrica čiji svi elementi su nule, jedinična matrica nije matrica čiji svi elementi su jedinice. Ime jedinična matrica potiče od toga što se množenjem sa jediničnom matricom (odgovarajućeg formata) ne mijenja polazna matrica, kao što se ni množenjem broja sa jedinicom taj broj ne mijenja.
Jedinična matrica je matrica čiji elementi na glavoj dijagonali su jedinice, a na svim ostalim mjestima su nule. Drugim riječima, $E_n = \left(e_{ij}\right)_{nxn}$, pri čemu je $e_{ij} = 1$ za $i = j$, dok je $e_{ij} = 0$ za sve ostale i i j. Na primjer,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Može se pokazati da, ukoliko je $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, tada je $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$ (ova osobina je analogna osobini realnih brojeva tj. činjenici da je $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, za sve realne brojeve a).
Množenje matrica, pored navedenih ima i slijedeće osobine (ovdje su nam A, B i C kvadratne matrice istog formata):
1. $A \cdot \left(B \cdot C\right) = \left(A \cdot B\right) \cdot C$ (množenje matrica je asocijativno, iako nije komutativno)
2. $A \cdot \left(B + C\right) = AB + AC$ (množenje matrica je distributivno s lijeva prema sabiranju)
3. $\left(B + C\right) \cdot A = BA + CA$ (množenje matrica je distributivno s desna prema sabiranju)
4. $A \cdot O = O \cdot A = O$ (sa O smo označili nula-matricu)

Napomenimo na kraju da, zbog toga što množenje matrica nije komutativno moramo posebno razmatrati množenje s lijeve i s desne strane i voditi o tome računa.

I.1.3. Transponovana matrica

Neka je data matrica $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$. Transponovana matrica matrice A, u oznaci A^T se definiše sa $A^T = \left(a_{ji}\right)_{nxm}$.
Dakle, matrica A^T se dobije kada u matrici A vrste i kolone zamijene mjesta (tj. prva vrsta postane prva kolona, druga vrsta postane druga kolona, itd.)
Primjer. Odredimo transponovanu matricu matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Kako je matrica A formata 3x4, to će transponovana matrica biti formata 4x3. Imamo

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Očigledno je da je $\left(A^T\right)^T = A$. Operacija transponovanja matrica ima i slijedeće osobine:

1. $\left(\lambda A + \mu B\right)^T = \lambda A^T + \mu B^T$, gdje su A i B matrice istog formata, a λ i μ realni brojevi.
2. $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$, gdje su A i B saglasne matrice.

Ako je $A = A^T$, za matricu A kažemo da je **simetrična** matrica. Očigledno je da simetrična matrica mora biti kvadratna.

Primjer. Matrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ je simetrična matrica.

Ako je $A^T = -A$, za matricu kažemo da je **kososimetrična**. Kososimetrična matrica mora biti kvadratna i imati nule na glavnoj dijagonali.

Primjer. Matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ je kososimetrična matrica. Provjerite to za vježbu.

I.2. Pojam determinante materice. Način izračunavanja determinante reda 2 i 3. Osobine determinanti.

I.2.1. Pojam determinante matrice

U prethodnom dijelu smo vidjeli da množenje kvadratnih matrica ima osobine slične osobinama množenja realnih brojeva (osim komutativnosti).
Jedna od tih osobina jeste egzistencija jedinične matrice E_n sa osobinom da je $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, za sve $A \in \mathbb{R}^{nxn}$.
Kako u skupu realnih brojeva svaki realan broj a, $a \neq 0$ ima svoj inverzni element a^{-1} takav da vrijedi $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, postavlja se pitanje da li slična osobina vrijedi za sve matrice $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $A \neq O$. Dakle, postavlja se pitanje za koje matrice $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ postoji matrica $A^{-1} \in \mathbb{R}^{nxn}$ takva da vrijedi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.
Odgovor na to pitanje će nam dati determinanta matrice.
Stroga definicija determinante matrice, baš kao i stroga definicija matrice je matematički dosta zahtjevna i mi je ovdje nećemo navoditi.
Smatrat ćemo da je determinanta kvadratne matrice $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ realan broj pridružen toj matrici. Označavat ćemo ga sa $\det A$ ili $|A|$.
Napomenimo da se determinanta pridružuje isključivo kvadratnoj matrici. Ukoliko je matrica formata nxn, za determinantu pridruženu toj matrici kažemo da je reda n.

I.2.2. Izračunavanje determinanti reda 2 i reda 3.

Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ proizvoljna matrica formata 2x2. Po definiciji je

$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd$.

Dakle, determinanta reda 2 se izračunava tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali te determinante.

Primjer. Izračunajmo determinantu matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Imamo $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 9 + 8 = 17$.

Neka je sada $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ proizvoljna matrica formata 3x3. Determinantu matrice A možemo izračunati na slijedeći način:

Kao prvo, s desne strane determinante dopišemo prve dvije kolone matrice A, a zatim množimo elemente na tri glavne dijagonale, saberemo ih i od njih oduzmemo zbir proizvoda elemenata sa sporedne dijagonale. Imamo:

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \quad = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1).$$

Postoje i drugi načini izračunavanja determinanti trećeg reda. O njima možete pročitati u udžbeniku B. Lučića, glava II, poglavlje 2.7.3.

Primjer. Izračunajmo determinantu matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Imamo:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix} \quad = (1 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \cdot 2) - (0 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2) =$$

$$= -3 - 2 - 4 = -9.$$

I.2.3. Osobine determinanti

U prethodnom primjeru uočili smo da ukoliko u determinanti postoji dosta nula, lakše je izračunati njihovu vrijednost. Sada ćemo navesti neke osobine determinanti, pomoću kojih ih je jednostavnije izračunavati.

1. Za svaku kvadratnu matricu A je $\det A = \det A^T$.
2. Ako su u matrici A elementi jedne vrste ili kolone jednaki ili proporcionalni elementima druge vrste ili kolone, determinanta je jednaka nuli.
3. Determinanta se množi (dijeli) brojem različitim od nule tako da se elementi jedne vrste ili kolone determinante pomnože (podijele) tim brojem.
4. Ako dvije vrste ili kolone determinante zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak.
5. Vrijednost determinante ostaje nepromijenjena ukoliko sve elemente jedne vrste ili kolone pomnožimo nekim realnim brojem i saberemo sa odgovarajućim elementima neke druge vrste ili kolone.
6. Za kvadratne matrice A i B istog formata je $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

U slijedećem primjeru pokazat ćemo kako se primijenjuju osobine determinanti.

Primjer. Izračunati determinantu $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}$.

Pri izračunavanju ove determinante koristićemo se osobinom 5. kako bismo u prvoj vrsti determinante dobili nule. Kako bismo umjesto broja 2 u prvoj vrsti i drugoj koloni dobili nulu, prvu kolonu determinante pomnožit ćemo sa (-2) i dodati drugoj koloni matrice. Analogno, prvu kolonu determinante pomnožit ćemo sa (-3) i dodati trećoj koloni kako bismo u prvoj vrsti i trećoj koloni dobili broj 0, umjesto broja 3. Imamo:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 5 & -4 & -8 & 8\\ 9 & -8 & -16 & 12\\ 13 & -12 & -24 & 16\end{vmatrix}.$$

Kako su elementi druge kolone determinante D proporcionalni elementima treće kolone te determinante, to je, na osnovu osobine 2. vrijednost determinante D jednaka nuli.

I.3. Pojam minora i kofaktora i način njihovog izračunavanja. Laplaceovo pravilo o razvoju determinante.

I.3.1. Minor i kofaktor.

Neka je data kvadratna matrica $A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}$ i neka je

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$ determinanta matrice A.

Uočimo elemenat a_{ij} determinante D. On se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni. Kada iz determinante D izostavimo i-tu vrstu i j-tu kolonu, ostali elementi determinante D firmiraju novu determinantu reda $(n-1)$. Tako dobijenu determinantu zovemo **minorom** ili **subdeterminantom** elementa a_{ij} i označavamo je sa M_{ij}.

Determinanta D ima tačno $nxn=n^2$ minora, jer svakom elementu determinante odgovara po jedan minor.

Broj $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ zovemo **kofaktorom** ili **algebarskim komplementom** elementa a_{ij} determinante D, odnosno matrice A.

Primjer 1. Odredimo minore M_{22} i M_{13}, te kofaktore A_{32} i A_{11} determinante $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

Minor M_{22} jednak je determinanti koju dobijemo kada iz determinante D izbacimo drugu vrstu i drugu kolonu. Dakle, $M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-0\cdot 0=-1$.

Analogno, minor M_{13} jednak je determinanti koju dobijemo kada iz D izbacimo prvu vrstu i treću kolonu. Dakle, $M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4$.

Po definiciji kofaktora je $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1-0) = -1$.

Analogno je $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3-2) = -5$.

Primjer 2. Odredimo kofaktore A_{21} A_{32} i A_{42} matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Imamo: $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) = 1$.

Za vježbu odredite ostala dva kofaktora. (Rješenja se nalaze u dodatnim materijalima)

I.3.2. Laplaceovo pravilo o razvoju determinante

Do sada smo vidjeli kako izračunati determinantu drugog i trećeg reda. Na žalost, ne postoji tako jednostavan način za izračunavanje determinanti četvrtog i višeg reda. Za to će nam poslužiti Laplaceovo pravilo o razvoju determinante koje će nam govoriti o tome kako determinantu reda n prikazati kao sumu determinanti reda $n-1$. Na taj način, na primjer možemo determinantu reda 4 prikazati kao sumu determinanti reda 3 koje znamo izračunati. Analogno, determinantu reda 5 možemo prikazati kao sumu determinanti reda 4, koje izražavamo kao sumu determinanti reda 3, itd... sada ćemo navesti Laplaceovo pravilo o razvoju determinante:

Teorema. Determinanta D reda n jednaka je zbiru proizvoda elemenata ma koje vrste ili kolone i njima odgovarajućih kofaktora. Drugim riječima,

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} .$$

Dakle, determinantu možemo razviti po proizvoljnoj vrsti ili koloni. Kako se kofaktori (tj. determinante reda $n-1$) množe s odgovarajućim elementima, za razvoj determinante uzet ćemo onu vrstu ili kolonu u kojoj ima najviše nula. Korisno je i poslužiti se osobinama determinanti kako bismo dobili vrstu ili kolonu sa "puno" nula.

Primjer. Determinantu matrice A iz prethodnog primjera najjednostavnije je razviti po trećoj vrsti, drugoj ili četvrtoj koloni (jer u njima imamo po dvije nule). Pokažimo kako se izračunava determinanta razvojem po četvrtoj koloni.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{14} + 0\cdot A_{24} + 0\cdot A_{34} + 1\cdot A_{44} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-16) + 1\cdot(-5) = 16 - 5 = 11.$$

Pokažimo kako determinantu razviti po trećoj vrsti. Imamo:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&2&-1&0\\3&0&1&0\\1&0&3&1\end{vmatrix}=3\cdot A_{31}+0\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+0\cdot A_{34}=$$
$$=3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&2&1\\2&-1&0\\0&3&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot3+1\cdot1\cdot2=9+2=11.$$

Za vježbu, izračunajte determinantu matrice A razvijajući je po drugoj koloni. (Rješenja su u dodatnim materijalima)

I.4. Pojam inverzne matrice i način njenog izračunavanja.

I.4.1. Definicija inverzne matrice.

Kao prvo, daćemo definiciju adjungovane matrice.

Neka je data matrica $A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}$. Za matricu $A^*=\left(A_{ij}\right)^T$ kažemo da je **adjungovana matrica** matrice A.

Dakle, elementi adjungovane matrice dobiju se tako što za svaki od elemenata a_{ij} matrice A nađemo njegov kofaktor A_{ij}, te kofaktore složimo u matricu, a zatim tako dobijenu matricu transponujemo.

Izračunajte sami adjungovanu matricu matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, a zatim nađite proizvod $A\cdot A^*$.

(Rješenje je dato u dodatnim

Adjungovana matrica ima slijedeću veoma važnu osobinu:

$$A\cdot A^*=A^*\cdot A=\det A\cdot E_n. \qquad (1)$$

Sada ćemo definisati inverznu matricu matrice A.

Za matricu A kažemo da je **invertibilna ili regularna matrica** ukoliko postoji matrica A^{-1} takva da vrijedi

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E_n. \qquad (2)$$

Matricu A^{-1} za koju vrijedi relacija (2) zovemo **inverznom matricom** matrice A.

Očigledno je da postoji veza između relacija (1) i (2), odnosno između adjungovane matrice i inverzne matrice matrice A.

Ukoliko je $\det A=0$, tada je, na osnovu relacije (1) $A\cdot A^*=A^*\cdot A=O$ (Ovdje nam O označava nula-matricu), pa matrica A nema inverznu matricu (takva matrica zove se **singularna matrica**).

Ukoliko je $\det A\neq 0$, matrica je regularna, jer iz relacije (1), nakon dijeljenja sa $\det A\neq 0$ (uslov da je determinanta različita od 0 bio nam je potreban kako bismo podijelili sa brojem $\det A$) dobijamo

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det A}A^*\right)=\left(\frac{1}{\det A}A^*\right)\cdot A=E_n.$$

Dakle, ukoliko je $\det A\neq 0$, matrica je invertibilna i vrijedi

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*. \qquad (3)$$

I.4.2. Način izračunavanja inverzne matrice

Relacija (3) man govori o tome kako izračunati inverznu matricu date matrice (ukoliko ona postoji).
Neka je data matrica $A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}$. Inverznu matricu matrice A određujemo na slijedeći način:
1. Izračunamo determinantu $\det A$ matrice A. Ukoliko je $\det A=0$, matrica nema inverzne, pa je ne možemo ni izračunati. Ukoliko je $\det A\neq 0$, matrica ima inverznu, pa prelazimo na slijedeći korak.
2. Odredimo kofaktore A_{ij} svih elemenata a_{ij} matrice A.
3. Formiramo matricu kofaktora, pa je transponujemo. Na taj način smo dobili matricu $A^*=\left(A_{ij}\right)^T$.
4. Podijelimo matricu A^* sa $\det A$.
Na taj način smo dobili matricu $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$.

Primjer1. Ispitajmo da li matrica $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$ ima inverznu matricu i ukoliko ima odredimo je.
Ranije smo vidjeli da je $D=\det A=0$, pa data matrica nema inverznu.

Primjer 2. Ispitajmo da li matrica $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$ ima inverznu matricu i ukoliko ima odredimo je.
Izračunajmo determinantu matrice. Ranije smo vidjeli da je $\det A=-9\neq 0$, pa data matrica ima inverznu. Sad prelazimo na slijedeći korak, a to je izračnavanje kofaktora svih elemenata matrice A. Imamo:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=1\cdot(-3-2)=-5$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&1\\0&-1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2-0)=-2$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&3\\0&2\end{vmatrix}=1\cdot(-4-0)=-4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\2&-1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-2-0)=2$,

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=1\cdot(-1-0)=-1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2-0)=-2$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=1\cdot(2-0)=2$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(1-0)=-1$,

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}=1\cdot(3-(-4))=3+4=7$.

Dobijene kofaktore složit ćemo u slijedeću matricu: $\begin{pmatrix}-5&-2&-4\\2&-1&-2\\2&-1&7\end{pmatrix}$, koju ćemo transponovati da bismo dobili $A^*=\begin{pmatrix}-5&-2&-4\\2&-1&-2\\2&-1&7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-5&2&2\\-2&-1&-1\\-4&-2&7\end{pmatrix}$.

Sada je $A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 1/9 & 1/9 \\ 4/9 & 2/9 & -7/9 \end{pmatrix}$.

Provjerimo, na kraju da li je naš rezultat tačan. Da bismo to uradili trebamo pomnožiti matrice A i A^{-1} i vidjeti da li je njihov proizvod matrica E_3.

Imamo:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3.$$

Dakle, matrica A^{-1} je zaista inverzna matrica matrice A.

Za samostalan rad možete provjeriti da je $A^{-1} \cdot A = E_3$.

I.4.3. Osobine inverzne matrice

Na kraju, navešćemo tri osobine inverzne matrice koje su nam potrebne pri rješavanju matričnih jednačina.

1. Ako je A invertibilna matrica, tada je i A^{-1} također invertibilna i vrijedi $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. Ako su A i B invertibilne matrice, tada je i $A \cdot B$ također invertibilna matrica i vrijedi $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. Ako je A invertibilna matrica, tada je i A^T također invertibilna i vrijedi $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.